Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет

информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина «Прикладные задачи математического анализа»

«К защите допустить»

Руководитель курсовой работы канд. ф.-м. н., доцент

­\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ М.А. Калугина

\_\_\_.\_\_\_\_.2024

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

к курсовой работе

на тему:

**«ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОТОЧЕЧНОЙ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ»**

БГУИР КП 6-05 0612 02 07 ПЗ

Выполнил студент группы 353502

ЗГИРСКАЯ Дарья Денисовна

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись студента)

Курсовая работа представлена на проверку \_\_\_.\_\_\_\_.2024

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись студента)

Минск 2024

**СОДЕРЖАНИЕ**

[Введение 3](#_Toc185771703)

[1 Поточечная сходимость функциональных рядов 4](#_Toc185771704)

[1.1 Поточечная сходимость функционального ряда 4](#_Toc185771705)

[1.2 Признаки сходимости числовых рядов 4](#_Toc185771706)

[2 Равномерная сходимость функциональных рядов 6](#_Toc185771707)

[2.1 Равномерная сходимость функциональных рядов, ее критерии и свойства 6](#_Toc185771708)

[2.2 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов 7](#_Toc185771709)

[3 Примеры функциональных рядов с поточечной и равномерной сходимостью 9](#_Toc185771710)

[3.1 Прмеры функциональных рядов с поточечной сходимостью 9](#_Toc185771711)

[3.2 Прмеры функциональных рядов с равномерной сходимостью 10](#_Toc185771712)

[4 Процедуры Maple для работы с функциональными рядами и способы их визуализации 12](#_Toc185771713)

[5 Визуализация примеров в Maple и сравнительный анализ 14](#_Toc185771714)

[Заключение 16](#_Toc185771715)

[Список литературных источников 17](#_Toc185771716)

# **ВВЕДЕНИЕ**

В математическом анализе важную роль играют ряды функций, которые являются важным математическим аппаратом, применяемым для вычислений и исследований как в различных разделах самой математики, так и во многих ее приложениях [1]. При изучении рядов особое значение имеет их сходимость, и в данной работе уделяется внимание поточечной и равномерной сходимостям в частности.

Поточечная сходимость означает, что для каждой точки частичные суммы ряда стремятся к пределу, но это не всегда гарантирует хорошее поведение ряда на всей области. Равномерная сходимость, в отличие от поточечной, обеспечивает одинаковое стремление к пределу на всей области, что упрощает работу с рядом и позволяет корректно выполнять операции, такие как дифференцирование и интегрирование.

Целью данной курсовой работы является исследование и визуализация поточечной и равномерной сходимости функциональных рядов с помощью системы Maplesoft Maple. Для достижения поставленной цели необходимо:

1. Дать определения понятиям поточечной и равномерной сходимости функциональных рядов. Рассмотреть признаки сходимостей рядов.
2. Рассмотреть эти виды сходимости функциональных рядов на конкретных примерах.
3. Изучить возможности Maple для работы с функциональными рядами, а также различные способы визуализации сходимости функциональных рядов.
4. Визуализировать пример функционального ряда, обладающего поточечной сходимостью, но не обладающего равномерной сходимостью, а также функционального ряда, обладающего равномерной сходимостью. Сравнить результат.

Таким образом, в ходе данной работы будут исследованы поточечная и равномерная сходимости функциональных рядов. Также, в системе Maplesoft Maple будут созданы визуализации, которые наглядно продемонстрируют функциональные ряды с рассматриваемыми видами сходимостей.

# **1 ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ**

## **1.1 Поточечная сходимость функционального ряда [2]**

Функциональный ряд

, , (1.1)

называется *сходящимся в точке* , если сходится числовой ряд .

*Множеством поточечной сходимости* функционального ряда (1.1) называется множество всех точек , в которых сходится этот ряд.

*Сумма* *сходящегося функционального ряда* есть предел функциональной последовательности его *частных сумм* ,

Факт сходимости ряда (1.1) на множестве будем записывать в виде или в виде , если сумма ряда нам не известна (или не интересует нас). Если является суммой ряда (1.1) на множестве , то используют запись

, .

Поскольку при каждом фиксированном значении функциональный ряд (1.1) является обычным числовым рядом , то для исследования его сходимости применимы все признаки сходимости числовых рядов.

## **1.2 Признаки сходимости числовых рядов [3]**

**Признак сходимости Д’Аламбера.** Пусть дан ряд с положительными членами , , тогда

1. Если , то ряд сходится,
2. Если , в частности, если , то ряд расходится.

**Радикальный признак Коши.** Пусть дан ряд с неотрицательными членами: . Тогда

1. Если , то ряд сходится,
2. Если , то ряд расходится.

**Интегральный признак Коши.**

1. Если существует, то ряд сходится.
2. Если не существует, то ряд расходится.

**Признак сравнения.**

1. Если сходится и , то также сходится.
2. Если расходится и , то также расходится.

**Предельный признак сравнения.** Если предел отношений исходного ряда с расходимым рядом равен конечному числу, отличному от нуля, то ряд расходится.

Если предел отношений исходного ряда со сходимым рядом равен конечному числу, отличному от нуля, то ряд расходится.

# **2 РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ**

## **2.1 Равномерная сходимость функциональных рядов, ее критерии и свойства [2]**

Пусть ряд

(2.1)

сходится (поточечно) на и – сумма ряда. Ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве , если последовательность его частных сумм сходится равномерно на , . Это означает, что

При этом мы будем использовать обозначения:

Если – -ый остаток ряда, то

.

Сходящийся числовой ряд можно трактовать как равномерно сходящийся на ряд из постоянных на функций .

**Критерий Коши равномерной сходимости.** Для равномерной сходимости на функционального ряда (2.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равномерное условие Коши:

**Следствие 1. (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.)** Если ряд (2.1) сходится равномерно на множестве , то на этом множестве равномерно сходится к нулю последовательность членов ряда:

*.*

**Следствие 2.** Если

,

то ряд (2.1) не является равномерно сходящимся на множестве .

## **2.2 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов [2]**

**Признак Вейерштрасса (мажорантный).** Если для всех и всех , и числовой ряд сходится, то ряд сходится равномерно (и абсолютно) на множестве .

Ряд называется в этом случае *числовой мажорантой* для ряда (2.1) на . Отсутствие сходящейся мажоранты еще не означает, что на X нет равномерной сходимости.

Если для всех и , то

**Признак Абеля.** Если:

1)

2) функциональная последовательность ограничена в совокупности, т. е. существует такое постоянное число , что при всех и всех ,

3) последовательность монотонна при каждом фиксированном , то

.

*Замечание*. В роли ряда может выступать и сходящийся числовой ряд.

**Признак Дирихле.** Если:

1) суммы ограничены в совокупности, т. е. существует такое постоянное число , что при всех и всех ,

2) последовательность монотонна при каждом фиксированном ,

3) , то

.

Как следствие признака Дирихле имеем признак Лейбница.

**Признак Лейбница.** Если:

1)  при всех и всех ,

2) последовательность монотонна при каждом фиксированном ,

3) , то .

Также, из определения равномерной сходимости следуют следующие утверждения:

1. Если ряды и равномерно сходятся на множестве , то любая из линейная комбинация , где и – постоянные, равномерно сходится на .
2. Если ряд сходится равномерно на множестве , то сходимость будет равномерной на любом множестве .
3. На всяком конечном подмножестве множества сходимости ряда этот ряд сходится равномерно.
4. Если ряд равномерно сходится на каждом из множеств и , то на множестве этот ряд сходится равномерно. (При этом данное утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств).

# **3 ПРИМЕРЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ С ПОТОЧЕЧНОЙ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТЬЮ**

## **3.1 Прмеры функциональных рядов с поточечной сходимостью**

**3.1.1[2].** Найти множество сходимости ряда .

*Решение.* Все члены ряда определены на . При фиксированном применим признак Коши абсолютной сходимости ряда. Поскольку

,

то при , т. е. при ряд сходится абсолютно (рис. 3.1.1).

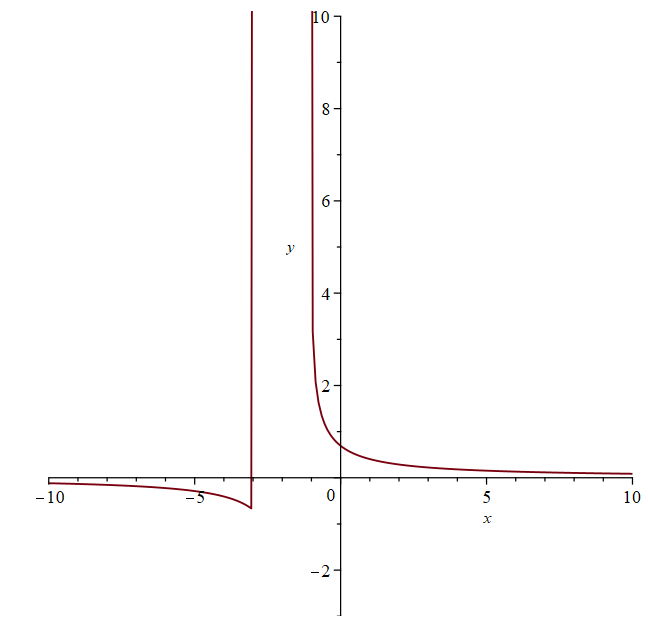


Рисунок 3.1.1 – График суммы ряда

При ряд расходится, т. к. . При , т. е. при и , получаем, соответственно, числовые ряды, сходящийся согласно признаку Лейбница, и – расходящийся ряд. Итак, – множество поточечной сходимости.

**3.1.2 [2].** Исследовать на сходимость ряд .

*Решение.* Применим признак Д’Аламбера:

Т.к. по признаку Д’Аламбера при L < 1 рассматриваемый ряд сходится абсолютно, то исходный ряд сходится при (рис. 3.1.2).

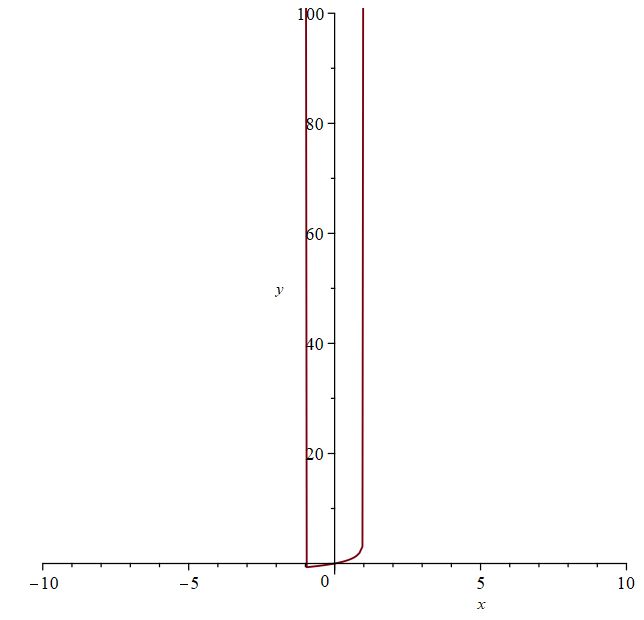


Рисунок 3.1.2 – График суммы ряда

Таким образом, – множество поточечной сходимости рассматриваемого ряда.

## **3.2 Прмеры функциональных рядов с равномерной сходимостью**

**3.2.1 [3].** Доказать, что ряд сходится.

*Решение.* Во всех точках этого интервала ряд сходится как геометрическая прогрессия, и его остаток равен . Из того, что для всех справедливо неравенство и , следует, что данный ряд сходится равномерно на множестве (рис. 3.2.1).

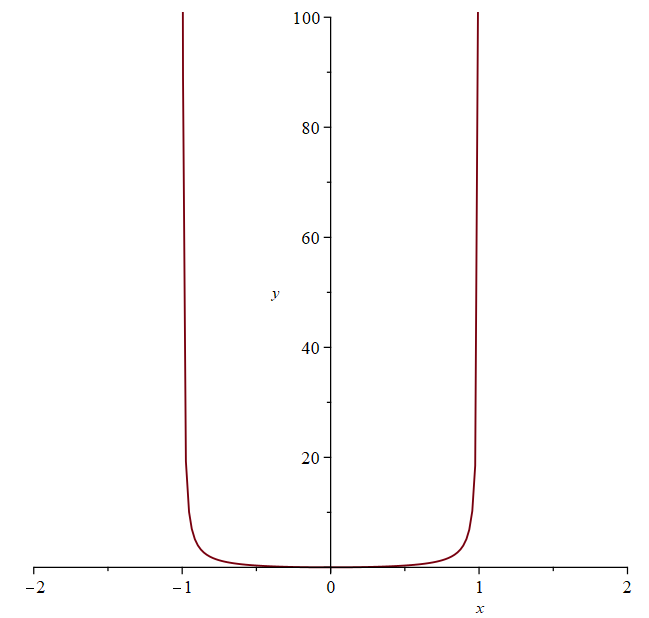


Рисунок 3.2.1 – График суммы ряда

**3.2.2 [3].** Проверим, что ряд равномерно сходится на .

*Решение.* Первое слагаемое в сумме принимает наибольшее значение в точке , второе – в точке . Следовательно, для всех имеем, что , и в силу признака Вейерштрасса получаем, что данный ряд сходится равномерно на .

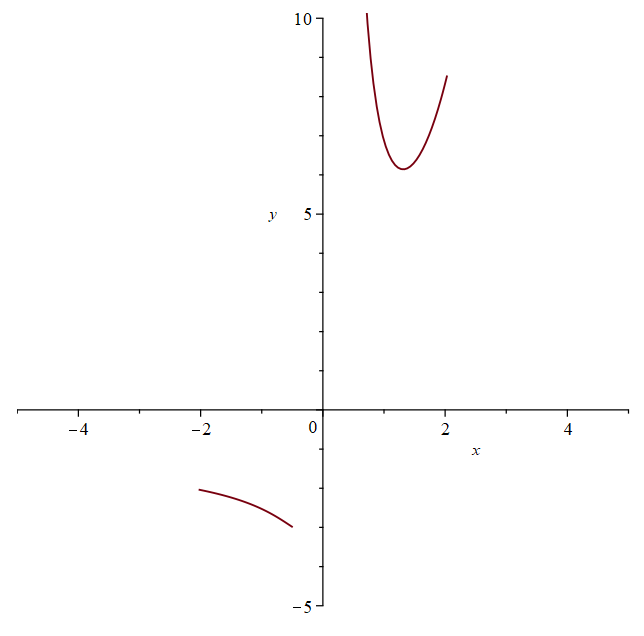


Рисунок 3.2.2 – График суммы ряда

# **4 ПРОЦЕДУРЫ MAPLE ДЛЯ РАБОТЫ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ И СПОСОБЫ ИХ ВИЗУАЛИЗАЦИИ**

**4.1 Процедуры Maple для работы с функциональными рядами**

В данной работе была использована процедура sum системы Maplesoft Maple, позволяющая вычислить сумму в аналитическом виде (если это невозможно сделать, Maple возвращает исходное выражение суммы).

В первом параметре процедура принимает выражение, сумма которого будет вычислена, а во втором – диапазон значений для её вычисления.

**4.2 Способы визуализации функциональных рядов**

Для визуализации функциональных рядов были использованы процедуры из пакета plots.

**4.2.1 Процедура plot**

Принимает на вход два обязательных параметра: выражение от независимой переменной и саму независимую переменную.

Возвращает построенный график заданного выражения (рис. 4.1.1).

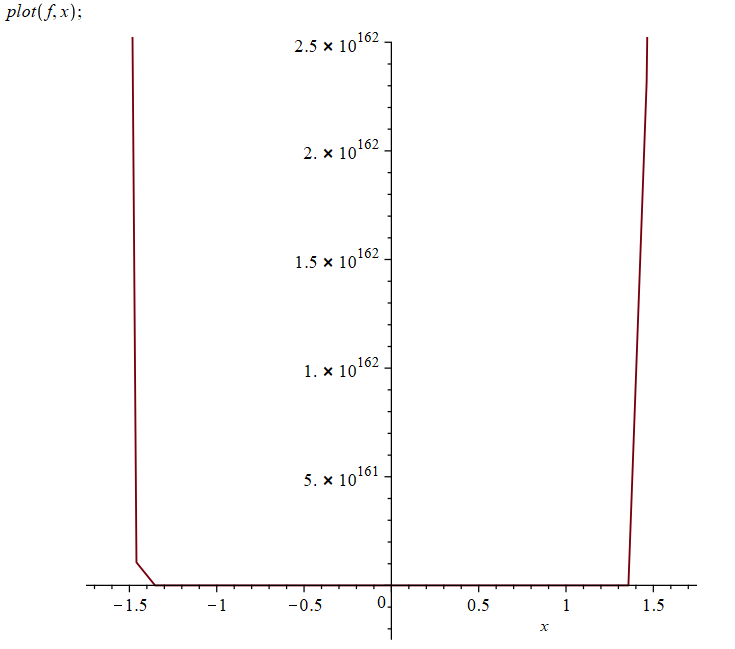


Рисунок 4.1.1 – Пример использования процедуры plot

**4.2.2 Процедура animate**

Принимает на вход параметры для команды plot этого же пакета, а также имя параметра, относительно которого будет создана анимация, и его диапазон.

Возвращает анимацию заданного выражения, представляющую собой последовательно сменяющуюся серию графиков относительно ранее заданного параметра анимации и его диапазона (рис. 4.2.2).

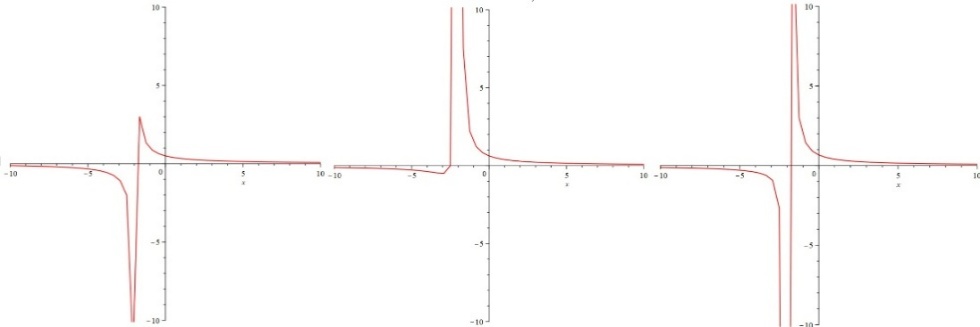


Рисунок 4.2.2 – Пример использования процедуры animate (три последовательных значения параметра анимации)

**4.2.3 Процедура interactiveparams**

Принимает на вход параметры для команды plot этого же пакета, имена параметров, которые могут быть интерактивно заданы при запуске процедуры, а также диапазон, в котором их можно задать.

После запуска предоставляет возможность интерактивно задать параметр (рис. 4.2.3). Возвращает график с заданным параметром.

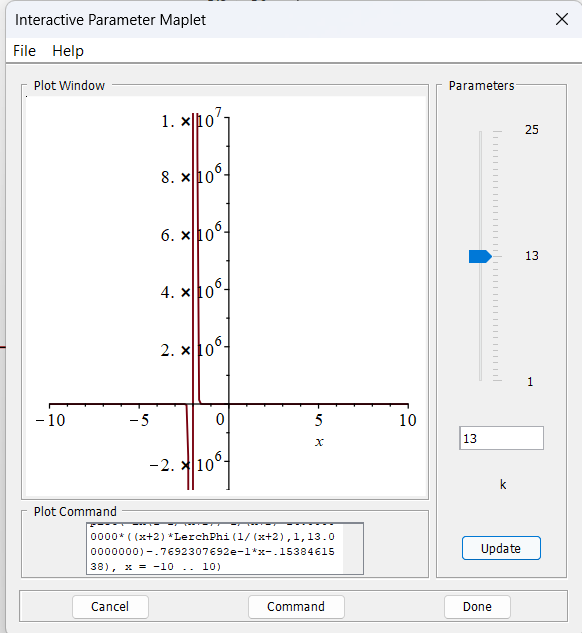


Рисунок 4.2.3 – Пример использования команды interactiveparams

# **5 ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРИМЕРОВ В MAPLE И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

**5.1 Пример поточечной сходимости функционального ряда**

Рассмотрим для начала промежуток . В этом случае при Если же то для любого значения n. При . Это значит, что данный функциональный ряд сходится поточечно на каждом рассмотренном промежутке, но при этом не является равномерно сходящимся, поскольку нарушается условие равномерной сходимости функционального ряда

.

Т.е. можно подобрать такое , что . Это хорошо видно на графике функционального ряда вблизи (рис. 5.1). Такой график означает прерывность суммы ряда.

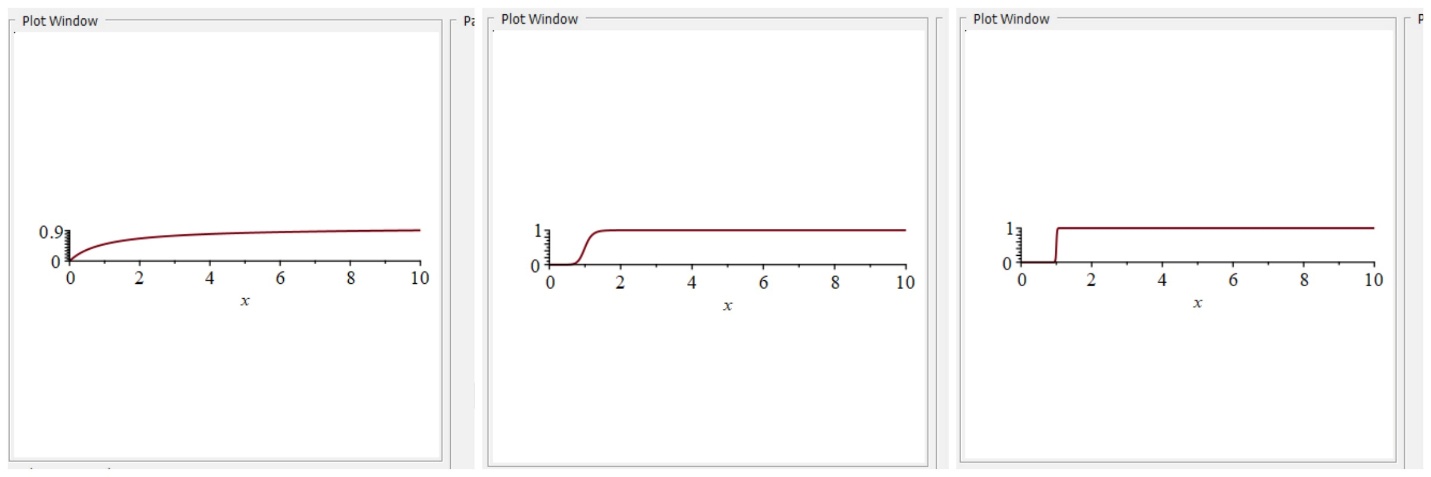


Рисунок 5.1 – Графики функции при соответственно

**5.2 Пример равномерной сходимости функционального ряда [3]**

Если , то ; если , то , для всех . Следовательно, множеством сходимости последоваетльности является вся числовая ось и

Оценим . в силу четности функций , и неравенств имеем, что

Отсюда получаем, что и, следовательно, данная последовательность равномерно сходится на к (рис. 5.2).

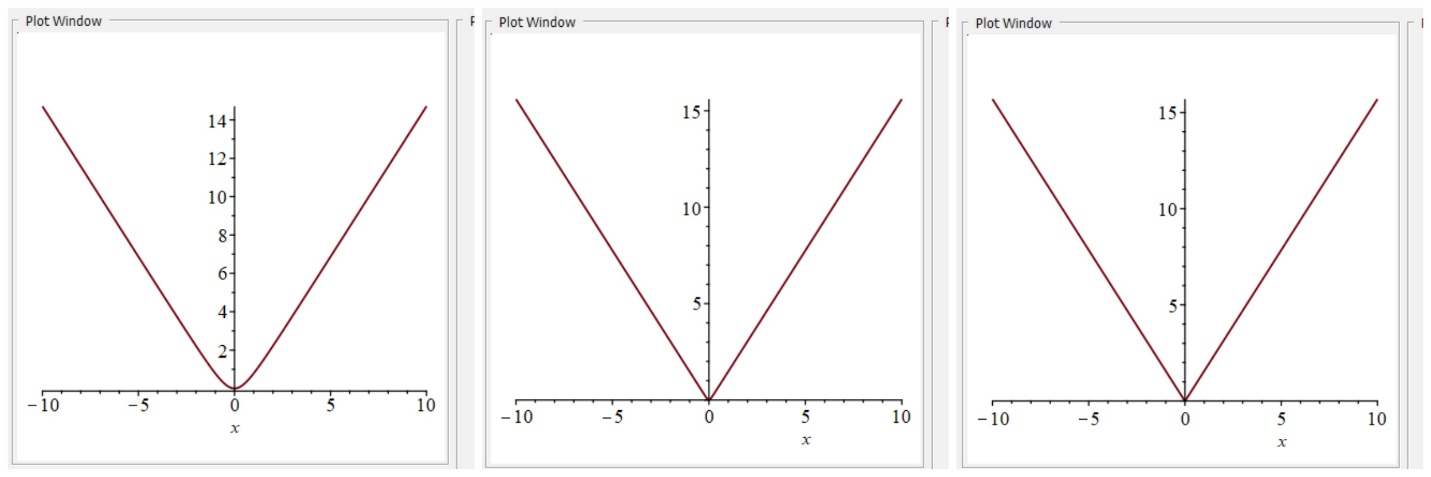


Рисунок 5.2 – Графики функции при соответственно

В рассмотренных премерах можно увидеть, что отличием между двумя видами сходимостей функциональных рядов на графике является наличие резкого «скачка» (рис. 5.1) у графика функции-члена ряда, имеющего поточечную сходимость (и это становится более заметным с ростом n) и его отсутствие при равномерной сходимости ряда (рис. 5.2).

# **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В ходе данной курсовой работы были даны определения поточечной и равномерной сходимости функциональных рядов и рассмотрены их признаки сходимости. Также были представлены несколько функциональных рядов, сопровождающиеся графиками их сумм (созданных в системе Maplesoft maple); была доказана сходимость рассматриваемых рядов на основе изложенных ранее признаков сходимости.

После этого были найдены несколько способов визуализации функциональных рядов в системе Maplesoft Maple, позволяющих наглядно продемонстрировать их вид сходимости (стандартный график, анимированный график, интерактивный график с возожностью для пользователя задать параметр).

Далее были визуализированы два примера функциональных рядов с поточечной и равномерной сходимостью. Это позволило отобразить разницу между рассматриваемыми видами сходимостей и сделать вывод об их визуальном отличии.

Таким образом, в данной работе были исследованы поточечная и равномерная сходимости функциональных рядов, а также найдены способы их наглядной визуализации с помощью системы Maplesoft Maple.

# **СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ**

[1] Функциональные ряды: методические указания / В.С. Капитонов [и др.] – СПб., СПбГТИ(ТУ), 2005. – 30 c.

[2] Функциональные ряды и последовательности : учеб.-метод. пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики / О. А. Кастрица [и др.] – Минск: БГУ, 2008. – 47 с.

[3] Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды) : учеб. пособие / Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. – М.: Изд-во Факториал, 1996. – 477 с.

[4] Зорич, В. А. Математический анализ. Часть II / В. А. Зорич. – М.: МЦНМО, 2019.

[5] Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов. В 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – Т. 2. – 800 с.

[6] Курс математического анализа : пособие для студентов заочников физ.- мат. фак-тов пед. ин-тов. В 2 т. / под ред. проф. Б. 3. Вулиха. – М.:Просвещение, 1972. – Т. 2. – 439 с.

[7] Равномерная сходимость функционального ряда [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A0%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%B0&mobileaction=toggle_view_desktop>.

[8] Равномерная сходимость ряда [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mathprofi.ru/ravnomernaja_shodimost.html>.

[9] Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие. / Б. П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, ЧеРо, 1997. – 624 с.

[10] Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – М.:Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

[11] Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие. В 10 ч. / А. А. Карпук [и др.] – Минск : БГУИР, 2007. – Ч. 8. – 119 с.

[12] Признаки сходимости ряда [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://math.semestr.ru/math/dalembert.php>.

[13] Real Analysis 24 | Pointwise Convergence [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://youtu.be/Kq\_KZpljeXo?si=iFQejtBr9kWGRRg1.

[14] Real Analysis 25 | Uniform Convergence [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://youtu.be/O2HKxNcom7g?si=sQhcdXY0a6NFQZdZ.